



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- objasnit pojem primitivní funkce,
- objasnit pojem neurčitý integrál,
- prakticky integrovat některé jednoduché funkce,
- použít metodu per partes a substituční metodu,
- integrovat racionální lomenou funkci,
- integrovat integrály obsahující goniometrické funkce,
- integrovat integrály obsahující odmocniny.

§1. 2.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 2.1. Necht' funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I . Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na I , jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** z funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x) dx$. Tedy

$$\int f(x) dx = \{F(x) : F(x) \text{ je primitivní k } f(x) \text{ na } I\}. \quad (2.1)$$

Pokud v předchozí definici není interval I otevřený, v krajních bodech máme na mysli jednostranné derivace.

Symbol $\int$ pro neurčitý integrál vznikl protažením písmene S, kterým začíná slovo *suma* (jakou to má souvislost, bude patrné v kapitole 3). Funkci $f(x)$ nazýváme **integrandem**. Výraz dx je **diferenciál proměnné x** a v tuto chvíli je jeho význam jen v tom, že nám říká, jak je označená proměnná. Později ale uvidíme, že nám usnadní např. výpočetní mechanismus při tzv. substituční metodě.

Zkusme nyní najít nějakou primitivní funkci např. k funkci $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také pro funkci $\sin x + 3$ platí $(\sin x + 3)' = \cos x$, tudíž i funkce $\sin x + 3$ je primitivní k funkci $\cos x$. Podobně obecněji všechny funkce $\sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, jsou primitivní k funkci $\cos x$.

Obecně platí: Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I , jsou také funkce $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, rovněž primitivní k $f(x)$ na I . Má-li tedy funkce $f(x)$ aspoň jednu primitivní funkci, má jich pak nekonečně mnoho. Naskytá se otázka, zda toto už jsou všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$. Odpověď dává následující věta.

V.1.4.1: Věta 2.2. Necht' funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I . Pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Necht' $F(x)$ a $G(x)$ jsou dvě primitivní funkce k $f(x)$. Tedy $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Protože I je interval, platí podle důsledku Lagrangeovy¹ věty o střední hodnotě — viz [12, str. 233], že tyto funkce se liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G(x) = F(x) + c$, což jsme měli dokázat. $\square$

Jinými slovy, předchozí věta říká, že známe-li jednu primitivní funkci, známe všechny. **Rozdíl dvou takových primitivních funkcí je na intervalu I konstantní.**

Pro zájemce:



Zdůrazněme však, že je podstatné, že I je interval. Pokud I není interval, může se stát, že $F'(x) = G'(x)$, ale $F(x) - G(x)$ není na I konstantní. Např. funkce $F(x) = \operatorname{sgn} x$ uvažovaná na množině $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je rovna -1 na intervalu $(-\infty, 0)$ a 1 na intervalu $(0, +\infty)$, a má tedy v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nulovou derivaci — viz obr. 2.2. Jinou takovou funkcí mající všude nulovou derivaci je např. $G(x) = 0$. Přitom jejich rozdíl $F(x) - G(x) = \operatorname{sgn} x$ není na množině $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstantní. Je ovšem konstantní na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ resp. $(0, +\infty)$, jsou-li uvažovány samostatně, což je ve shodě s větou 2.2. (Připomeňme, že pojem primitivní funkce jsme zavedli jen na intervalu.)

Vzhledem k předchozí větě můžeme nyní upravit vzorec (2.1). **Je-li $F(x)$ nějaká primitivní funkce k $f(x)$, pak**

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Číslo c nazýváme integrační konstanta. Říkáme, že neurčitý integrál je určen až na konstantu.

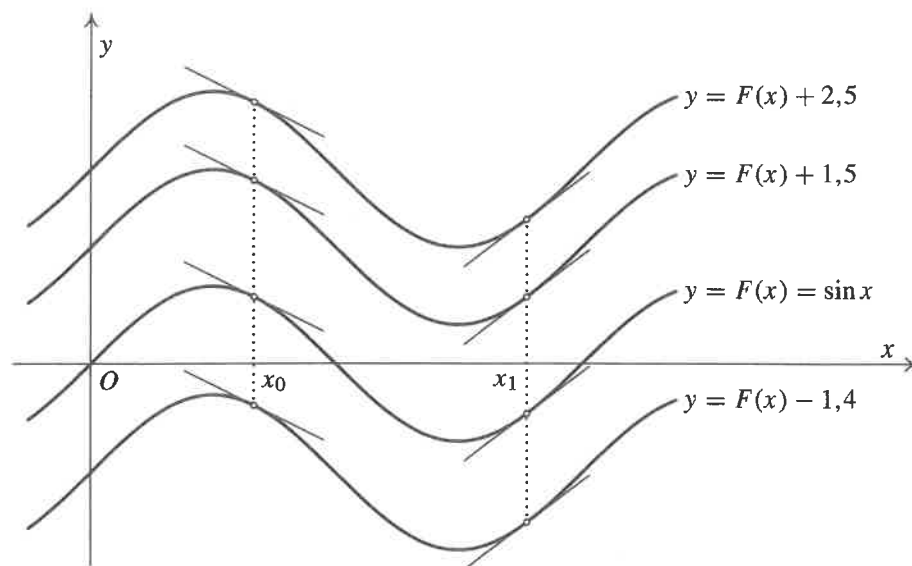
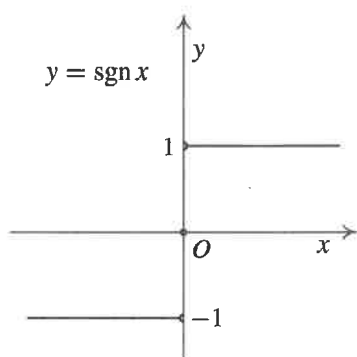
Přesněji by výraz na pravé straně rovnosti (2.2) měl být ve složených závorkách, protože jde o množinu, ale tento zápis se nepoužívá. Rovnost (2.2) tedy znamená, že všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ mají tvar $F(x) + c$, kde $F(x)$ je jedna konkrétní pevně zvolená primitivní funkce k $f(x)$ a c je libovolná konstanta.

Je-li např. $f(x) = \cos x$, za pevně zvolenou primitivní funkci můžeme volit třeba $F(x) = \sin x$. Pak

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Situace je znázorněna na obr. 2.1. Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou vůči sobě rovnoběžně posunuty ve směru osy y . Pro každé pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tedy mají stejné směrnice, což odpovídá tomu, že všechny primitivní funkce $F(x) + c$ mají touž derivaci $f(x)$. Situace je znázorněna na zmíněném obrázku pro konkrétní body x_0 a x_1 .

¹ **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) (čti lagranž) — významný francouzský matematik a mechanik. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky. Mimo jiné ovlivnil rozvoj matematické analýzy a položil základy variačního počtu.

Obr. 2.1: Primitivní funkce k funkci $\cos x$ 

Obr. 2.2

Nyní si všimneme otázky, zda k dané funkci $f(x)$ vůbec nějaká primitivní funkce existuje. Obecně tomu tak není. Např. o funkci $\operatorname{sgn} x$ definované vztahem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

jejíž graf je na obr. 2.2, lze ukázat, že k ní neexistuje primitivní funkce na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Tuto skutečnost nebudeme dokazovat (funkce $\operatorname{sgn} x$ není na $\mathbb{R}$ tzv. darbovovská — viz např. [4, str. 187]). Naštěstí ale existuje velmi

jednoduchá postačující podmínka existence primitivní funkce, která je obsahem následující věty.

V.4.2.1 Věta 2.3. Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f .

Větu nebudeme dokazovat, protože k tomu nemáme potřebné nástroje. V kapitole 3 se zmíníme, jak se taková primitivní funkce konstruuje (důsledek 3.29).

Předchozí věta je typickým příkladem tzv. *existenční věty*. Říká, že něco existuje, ale neříká, jak se to najde. (Ani důkaz, který jsme neuvedli, není v tomto smyslu konstruktivní.) Později se o tomto problému, který značně komplikuje situaci kolem hledání primitivních funkcí, ještě zmíníme — viz kapitola 2.6.

Na závěr uvedeme jednoduchou, ale velmi důležitou větu, kterou budeme v dalším textu při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Nezbytné pro integraci:

V.4.3. Věta 2.4. *Nechť na intervalu I existují integrály $\int f(x) dx$ a $\int g(x) dx$. Pak na I existují také integrály $\int (f(x) \pm g(x)) dx$ a $\int \alpha f(x) dx$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, a platí:*

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad (2.3)$$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx. \quad (2.4)$$

Důkaz. Plyne přímo ze základních vlastností derivace. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce ke $g(x)$, platí $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$, takže $F(x) \pm G(x)$ je primitivní funkce k $f(x) \pm g(x)$ a podobně platí $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$, takže $\alpha F(x)$ je primitivní funkce k $\alpha f(x)$. $\square$

Stručně říkáme, že „neurčitý integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) neurčitých integrálů“ a že „konstantu, kterou se násobí (tzv. multiplikativní konstantu), smíme z neurčitého integrálu vytknout“. První tvrzení lze pochopitelně snadno rozšířit ze dvou na libovolný konečný počet sčítanců. Všimněte si rovněž, že z hlediska existence musíme číst vzorce (2.3) a (2.4) zprava doleva — integrály na pravých stranách musí existovat; pak existují i integrály nalevo a platí příslušné rovnosti.

Konečně ještě připomeňme, že přímo z definice neurčitého integrálu vyplývá platnost rovností

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x) \quad \text{a} \quad \int F'(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

takže operace derivování a integrace jsou navzájem komplementární. O správnosti výsledku integrace se tudíž vždy můžeme přesvědčit derivováním výsledku — musí nám vyjít zadaná funkce.

Poznámka 2.5. Všimněme si ještě vztahu (2.3). Na jeho pravé straně stojí ve skutečnosti součet dvou nekonečných množin. Upřesníme si, co se takovým součtem myslí. Sečteme libovolný prvek množiny $\int f(x) dx$ s libovolným prvkem množiny $\int g(x) dx$. Výsledkem je množina všech takových součtů. Avšak všechny prvky prvního neurčitého integrálu mají tvar $F(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, a všechny prvky druhého neurčitého integrálu mají tvar $G(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Zde $F(x)$ a $G(x)$ jsou pevně zvolené primitivní funkce k $f(x)$ a $g(x)$. Tedy výsledná množina je tvořena funkcemi tvaru $F(x) + G(x) + c_1 + c_2$, kde c_1 a c_2 probíhají nezávisle všechna reálná čísla. Jde tedy o množinu tvořenou funkcemi $F(x) + G(x) + c$, kde c je libovolné reálné číslo. Ale to je přesně levá strana zmíněného vztahu.

Podobně ve vztahu (2.4) násobek množiny $\int f(x) dx$ konstantou α na pravé straně tohoto vztahu provedeme tak, že násobíme konstantou α každý prvek této množiny. Prvky takto vytvořené množiny jsou pak všechny funkce tvaru $\alpha F(x) + \alpha c$, kde c je libovolné reálné číslo, což je (pro $\alpha \neq 0$) totéž, co všechny funkce tvaru $\alpha F(x) + c$.

Tabulkové integrály

1. $\int 0 dx = c,$	
2. $\int dx = x + c,$	
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ kde } n \in \mathbb{R}, n \neq -1,$	
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c,$	obecněji $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln x+a + c,$
5. $\int e^x dx = e^x + c,$	obecněji $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c,$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,$	obecněji $\int a^{bx} dx = \frac{1}{b} \frac{a^{bx}}{\ln a} + c, \quad a > 0,$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c,$	obecněji $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c,$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c,$	obecněji $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c,$
9. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + c,$	obecněji $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad \int \frac{1}{ax^2+1} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} ax$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c,$	obecněji $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} dx = \frac{1}{a} \arcsin ax$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln x+\sqrt{x^2+a} + c,$	
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c,$	obecněji $\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + c,$
12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c,$	obecněji $\int \frac{1}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax + c,$
14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c.$	

Tab. 2.1: Tabulka neurčitých integrálů

V předchozí tabulce a znamená s výjimkou vzorce 6 libovolné nenulové číslo, tj. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Číslo $c \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Vzorce platí na intervalech, na nichž jsou vždy obě strany definovány.

správný vzorec. U příkladů, kde je nutná nějaká úprava, vás nenapadne, jakou zvolit, protože nebudete ve vzniklých výrazech vidět příslušné vzorce. Rozhodně nevěřte, že k úspěšnému integrování stačí mít tabulku vzorců před očima a není třeba vzorce znát z paměti.



Příklad 2.6. Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $\int x \, dx,$

b) $\int \frac{1}{x^2} \, dx,$

c) $\int \sqrt{x} \, dx,$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx,$

e) $\int e^{-x} \, dx,$

f) $\int \frac{1}{x^2 + 3} \, dx,$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx,$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}} \, dx,$

i) $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} \, dx.$

Řešení. K řešení prvních čtyř příkladů využijeme 3. vzorec.

a) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$ (zde bylo $n = 1$),

b) $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$ (zde bylo $n = -2$),

c) $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$ (zde bylo $n = 1/2$),

d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-1/3} \, dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c$ (zde bylo $n = -1/3$).

e) Další příklad je na vzorec 5, kde $a = -1$. Dostaneme

$$\int e^{-x} \, dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c = -e^{-x} + c.$$

f) V tomto příkladu použijeme vzorec 9. Zde je $a^2 = 3$, tedy $a = \sqrt{3}$ (mohli bychom volit i $a = -\sqrt{3}$, ale proč si komplikovat život). Potom vyjde

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} \, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

g) V tomto příkladu použijeme vzorec 10. Zde je $a^2 = 4$, tedy $a = 2$. Vyjde tudíž

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{2} + c.$$

h) V tomto příkladu použijeme vzorec 11. Zde je $a = -7$, takže po dosazení vyjde

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2-7}| + c.$$

i) V posledním příkladu použijeme vzorec 14. Není totiž těžké všimnout si, že derivace jmenovatele je $(x^3 + x + 2)' = 3x^2 + 1$, což je právě čitatel. Tedy

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2} dx = \ln |x^3 + x + 2| + c.$$



V dalších příkladech použijeme navíc i větu 2.4, s jejíž pomocí převedeme složitější integrál na výpočet několika jednodušších.

Příklad 2.7. Vypočítejte následující neurčité integrály:



a) $\int (2x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2) dx,$ ~~b)~~ $\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx,$

c) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{2x/3} \right) dx.$

Řešení.

a) Jde o integraci mnohočlenu, což je s pomocí vzorce 3 a vztahu (2.4) snadné:

$$\begin{aligned} \int (2x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2) dx &= \\ &= 2 \int x^5 dx - \int x^4 dx + 3 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 2x + c = \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + 2x + c. \end{aligned}$$

b) Integrál rozdělíme na dva a použijeme vzorce 10 a 11.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}. \quad (2.5)$$

Protože před použitím zmíněných vzorců je třeba integrandy upravit, spočítáme každý integrál pro větší přehlednost samostatně (integrační konstantu doplníme až na závěr):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3(4/3-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{4/3-x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x}{2/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(ve vzorci 10 bylo $a^2 = 4/3$, tj. $a = 2/\sqrt{3}$) a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3(4/3+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{4/3+x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x + \sqrt{4/3+x^2}|. \end{aligned}$$

Všimněte si, že funkce se liší v jediném znaménku, ale jejich integrály jsou zcela odlišné. Dosazením do (2.5) dostaneme

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-3x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+3x^2}} \right) dx = \sqrt{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln|x + \sqrt{4/3 + x^2}| + c.$$

Integrační konstantu jsme doplnili až k celkovému výsledku.

c) Integrál rozdělíme na několik jednodušších a použijeme (po případných malých úpravách) potřebné vzorce.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3 \sin 5x + 2 \cos \frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2e^{2x/3} \right) dx &= \\ &= 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 3 \int \sin 5x dx + 2 \int \cos \frac{x}{2} dx + \int 3^x dx - \\ &\quad - 7 \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx - 4 \int \frac{dx}{x-3} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2/3} + 2 \int e^{2x/3} dx = \\ &= 2 \operatorname{tg} x - 3 \frac{-\cos 5x}{5} + 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{\ln 3} - 7 \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} - 4 \ln |x-3| - \\ &\quad - \frac{2}{3} \ln |x+2/3| + 2 \frac{e^{2x/3}}{\frac{2}{3}} + c = \\ &= 2 \operatorname{tg} x + \frac{3}{5} \cos 5x + 4 \sin \frac{x}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{7}{2^x \ln 2} - 4 \ln |x-3| - \\ &\quad - \frac{2}{3} \ln |x+2/3| + 3e^{2x/3} + c. \end{aligned}$$

Všimněte si, že integrační konstantu při výpočtu neurčitého integrálu musíme napsat v okamžiku, kdy byl určen poslední integrál. Při následujících úpravách ji pak opisujeme.



Příklad 2.8. Vypočítejte následující neurčité integrály:

$$\text{a) } \int \operatorname{tg}^2 au \, du, \quad a \neq 0, \quad \text{b) } \int \operatorname{tg} bs \, ds, \quad b \neq 0, \quad \text{c) } \int \frac{dt}{\sin t}.$$

Řešení. Všechny tři příklady převedeme vhodnými úpravami na tabulkové integrály. Musíme dávat pozor, jak je označená proměnná, tentokrát to není x .

a) Úprava je velmi jednoduchá, použijeme vztah $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, platný pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, a vzorec 12.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 au \, du &= \int \frac{\sin^2 au}{\cos^2 au} du = \int \frac{1 - \cos^2 au}{\cos^2 au} du = \int \left(\frac{1}{\cos^2 au} - \frac{\cos^2 au}{\cos^2 au} \right) du = \int \left(\frac{1}{\cos^2 au} - 1 \right) du = \frac{1}{a} \operatorname{tg} au - u + c. \end{aligned}$$

Integrační metoda per partes

V.2.1. Věta 2.9. Necht' funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx, \quad (2.6)$$

pokud aspoň jeden z integrálů v předchozím vztahu existuje.

Důkaz. Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ mající derivaci platí vztah $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Jeho integrací dostaneme

$$\int (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x) + c = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx.$$

Integrál $\int (uv' + u'v) dx$ tedy existuje. Pokud existuje aspoň jeden z integrálů $\int uv' dx$, $\int u'v dx$, necht' je to např. $\int uv' dx$, musí podle věty 2.4 existovat i integrál z rozdílu $\int ((uv' + u'v) - uv') dx = \int u'v dx$, což je druhý uvažovaný integrál, takže

$$u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

a odtud již dostáváme vztah (2.6). □

V příkladech, které budeme řešit, budou mít funkce spojitě derivace, takže existence integrálů bude zaručena větou 2.3.

Integrační metoda založená na vztahu (2.6) se nazývá *metoda per partes* (česky *po částech*). Stručně ji zapisujeme

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Hodí se na integrály, jejichž integrand má tvar součinu. Abychom dokázali napsat pravou stranu vztahu (2.6), musíme jeden činitel v levé straně (v našem označení u) umět derivovat (abychom získali u'), což nebývá problém, a druhý činitel (v našem označení v') musíme umět integrovat (abychom získali v), což už může být problém. A konečně integrál na pravé straně by měl být jednodušší z hlediska další integrace. Postup si ukážeme na příkladu.**Příklad 2.10.** Vypočítejte neurčitý integrál $\int x \sin x dx$, $x \in \mathbb{R}$.**Řešení.** Součin v zadání je zřejmý. Můžeme si zvolit buď $u = x$ a $v' = \sin x$, nebo naopak $u = \sin x$ a $v' = x$.Zkusíme nejprve první volbu. Je-li $u = x$, bude $u' = 1$. Dále $v' = \sin x$, tedy $v = \int \sin x dx = -\cos x$ (integrační konstantu volíme rovnu nule, stačí nám jedna konkrétní primitivní funkce). Ze vzorce (2.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c. \end{aligned}$$

Tato volba tedy vedla k cíli. Výpočet obvykle zapisujeme do jakési tabulky, takže zápis vypadá následovně:

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$

Při ručním zápisu píšeme tabulku buď pod integrál nebo vedle něho, zde budeme s ohledem na místo dávat přednost zápisu vedle integrálu a od zbytku výpočtu ji oddělíme svislými čarami.

Je dobré zvyknout si psát tuto pomocnou tabulku pořád stejně co do umístění u , u' , v a v' . Tento návyk vám umožní vyhnout se zbytečným chybám. Tedy v levém sloupci jsou funkce u a v' ze zadaného integrálu, na „hlavní diagonále“ tabulky máme u a v a v pravém sloupci máme funkce u' a v nového integrálu. Příslušné dvojice jsou ve vzorci (2.6) spolu vždy vynásobeny.

Zkusíme nyní ještě druhou volbu. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \sin x - \int (\cos x) \frac{x^2}{2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Předchozí rovnost je sice správná, ale nový integrál je očividně složitější než výchozí, takže tato volba nevede k cíli. ▲

Než si ukážeme další příklady, uvedeme si tabulku typických funkcí, jejichž neurčité integrály lze spočítat metodou per partes. Zároveň bude řečeno, kterou funkci derivujeme a kterou integrujeme. Výčet pochopitelně není vyčerpávající, existují i další integrály, které lze vyřešit pomocí metody per partes. Nicméně je důležité tyto základní typy znát, abyste se bez váhání dokázali správně rozhodnout.

Integrály řešitelné metodou per partes

V následujících tabulkách je $P(x)$ mnohočlen a a je nenulová konstanta. V prvním sloupci je uveden integrand, ve druhém sloupci je uvedeno, kterou funkci budeme derivovat, a ve třetím, kterou funkci budeme integrovat. Přehled rozdělíme do dvou částí.

U první skupiny *derivujeme mnohočlen* a integrujeme druhý činitel. Nový integrál bude součinem mnohočlenu, jehož stupeň bude o jedničku menší, a druhé funkce, která bude obdobná jako ve výchozím integrálu (exponenciální funkce e^{ax} se zachová, funkce sinus a kosinus se prohodí).

U druhé skupiny *integrujeme mnohočlen* a derivujeme druhý činitel. Opačná volba by ani nebyla možná, protože logaritmickou funkci, funkci arkussinus atd. ani neumíme (zatím) integrovat. Derivací se naopak těchto „nepříjemných“ funkcí zbavíme. Jejich

Integrand	u	v'
$P(x) e^{ax}$	$P(x)$	e^{ax}
$P(x) \sin ax$	$P(x)$	$\sin ax$
$P(x) \cos ax$	$P(x)$	$\cos ax$
$e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx$	1. nebo 2. derivace, 2. případ je 1. (opakuje se 2. krát)	

Tab. 2.2: Metoda per partes — první část

Integrand	u	v'
$P(x) \ln x$	$\ln x$	$P(x)$
$P(x) \arcsin ax$	$\arcsin ax$	$P(x)$
$P(x) \arccos ax$	$\arccos ax$	$P(x)$
$P(x) \operatorname{arctg} ax$	$\operatorname{arctg} ax$	$P(x)$
$P(x) \operatorname{arccotg} ax$	$\operatorname{arccotg} ax$	$P(x)$

Tab. 2.3: Metoda per partes — druhá část

derivace jsou totiž pro integraci „jednodušší“ $((\ln x)' = 1/x, (\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}, (\operatorname{arctg} x)' = 1/(x^2 + 1)$ atd.).



Příklad 2.11. Vypočítejte neurčitý integrál $\int (x^2 + 1) e^{-x} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Řešení. Jde o funkci typu „mnohočlen krát exponenciální funkce“, kterou najdeme v tabulce 2.2. Mnohočlen $x^2 + 1$ tedy budeme derivovat a exponenciální funkci e^{-x} integrovat. Zároveň si v tomto příkladu ukážeme typický rys metody per partes, a to **opakované použití**. Jak uvidíme, dostaneme integrál obdobného typu „mnohočlen krát exponenciální funkce“, ale mnohočlen bude mít nižší stupeň. Použijeme tedy metodu per partes ještě jednou. Obecně u této první skupiny funkcí uvedené v tabulce 2.2 pokračujeme tak dlouho, až se derivováním mnohočlen převede na konstantu (je-li jeho stupeň n , bude to po n -té derivaci). V našem případě postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 + 1) e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx = \\
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left[x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\
 &= -(x^2 + 1)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x} + c. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Příklad 2.12. Vypočtěte neurčitý integrál $\int (2x - 1) \ln x \, dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jde o integrál z tabulky 2.3, mnohočlen $2x - 1$ tudíž budeme integrovat a logaritmickou funkci budeme derivovat. Následně vyjde

$$\begin{aligned}
 \int (2x - 1) \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x - 1 & v = x^2 - x \end{array} \right| = \\
 &= (\ln x)(x^2 - x) - \int \frac{1}{x} (x^2 - x) \, dx = \\
 &= (x^2 - x) \ln x - \int (x - 1) \, dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 + x + c. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Příklad 2.13. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arccotg} x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Tento integrál zdánlivě nemá tvar součinu. Ale za druhý činitel si vždy můžeme představit jedničku, což je vlastně mnohočlen stupně nula. Jde tedy o integrál uvedený v tabulce 2.3. Derivovat tudíž budeme funkci arkuskotangens a integrovat jedničku. Vyjde tedy

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{arccotg} x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arccotg} x & u' = -\frac{1}{x^2+1} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\
 &= (\operatorname{arccotg} x)x - \int \left(-\frac{1}{x^2+1} \right) x \, dx = x \operatorname{arccotg} x + \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \\
 &= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.
 \end{aligned}$$

K výpočtu posledního integrálu jsme použili vzorec 14. $\blacktriangle$

V následujících příkladech si ukážeme další obrat, který se v souvislosti s metodou per partes často používá. Tento obrat spočívá v tom, že po integraci per partes (případně opakovaně) a úpravách se nám znovu objeví výchozí integrál, který máme určit. Tím dostaneme pro tento integrál rovnici

$$\int f(x) \, dx = h(x) + \alpha \int f(x) \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

(její levá strana je výchozí integrál a pravá strana je závěrečný výraz), z níž ho můžeme vypočítat (pokud se nezruší, tj. pokud $\alpha \neq 1$).

Příklad: $\int \ln x \, dx$, $x \in \mathbb{R}^+$

$$\int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c$$





Příklad 2.14. Vypočtěte neurčitý integrál $\int e^x \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nejde o žádný z typů uvedených v tabulkách 2.2 a 2.3. Použijeme postupně dvakrát metodu per partes, přičemž vždy budeme exponenciální funkce derivovat a druhý činitel integrovat (jinak bychom se vrátili zpátky k samotnému zadanému integrálu). Dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

z níž již snadno vypočítáme, že

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + c, \\ \int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c. \end{aligned}$$

Někdo možná čekal ve výsledku hodnotu $\frac{e}{2}$, ale je-li c libovolná konstanta, je $\frac{e}{2}$ také libovolná konstanta (vlastně jsme provedli přeznačení zlomku $\frac{e}{2}$ a pro novou hodnotu jsme použili totéž písmeno). V dalším textu už tento obrat nebudeme komentovat. ▲



Příklad 2.15. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení. Opět nalezneme rovnici pro hledaný integrál. Za jeden činitel volíme jedničku. Vyjde tudíž

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & u' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \arcsin x. \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x,$$

z níž po jednoduché úpravě obdržíme, že

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c.$$

Tento příklad není typický pro použití metody per partes a lze použít i jiný postup — viz příklad 2.30 a text pro zájemce na str. 77.

Příklad 2.16. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \cos^2 x dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Opět najdeme rovnici pro hledaný integrál. Za u i v' budeme tentokrát volit kosinus. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \\ &= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx, \end{aligned}$$

což vede k rovnici

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx,$$

z níž vyjde

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c.$$

Při úpravách jsme použili známý vzorec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. I tento integrál se často počítá jiným způsobem — viz příklad 2.46.

Shrňme si návody, které se vyskytují v souvislosti s metodou per partes:

- Existuje jistá skupina neurčitých integrálů ze součinu dvou funkcí, pro jejichž výpočet je (aspoň jako výchozí krok) typické použití metody per partes — viz tabulky 2.2 a 2.3.
- Za jeden z činitelů se volí jednička.
- Pro hledaný integrál získáme po použití metody per partes a následných úpravách rovnici, z níž lze tento integrál určit.
- Pomocí této metody se odvozují rekurentní vzorce — viz např. vztah (2.15).
- Metoda se často používá opakovaně.

- g) $\frac{w^{3/2}}{27} (18 \ln^2 w - 24 \ln w + 16)$, h) $\frac{1}{2} (H^2 + 1) \ln(H + 1) - \frac{H^2}{4} + \frac{H}{2}$,
 i) $\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$, j) $-\frac{1}{t} (\ln^3 t + 3 \ln^2 t + 6 \ln t + 6)$,
 k) $\frac{5}{2} (V^2 \operatorname{arctg} V - V + \operatorname{arctg} V)$, l) $-\frac{1}{K} (\ln^2 K + 2 \ln K + 2K)$.
3. a) $\frac{\operatorname{arctg} z}{4} (z^4 - 1) - \frac{z^3 - 3z}{12}$, b) $4\Omega \ln 2\Omega - 4\Omega$,
 c) $\theta \operatorname{arctg} \theta - \frac{1}{2} \ln(\theta^2 + 1)$, d) $\frac{t^2 \arcsin t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{4} - \frac{\arcsin t}{4}$,
 e) $\frac{1}{2} \arcsin^2 y$, f) $\frac{1}{2} e^T (\cos T + \sin T)$,
 g) $-\frac{2}{5} e^\phi \cos \frac{\phi}{2} + \frac{4}{5} e^\phi \sin \frac{\phi}{2}$, h) $\frac{1}{2} \ln^2 K$,
 i) $-\frac{e^{-2h}}{13} (3 \cos 3h + 2 \sin 3h)$, j) $\frac{(\sin x - 2 \cos x) e^x \sin x}{5} + \frac{2e^x}{5}$,
 k) $-\frac{3}{2} e^{-r/3} \left(\cos \frac{r}{3} + \sin \frac{r}{3} \right)$, l) $\frac{e^{3x}}{15} ((\cos 3x + 2 \sin 3x) \cos 3x + 2)$.

§3. 2.2.3. Substituční metoda

V tomto oddílu se seznámíme s další významnou metodou, která vznikne integrací rovnosti ze vzorce pro derivaci složené funkce. Připomeňme, že platí $(F[\varphi(x)])' = F'[\varphi(x)] \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$, kde jsme označili $F'(u) = f(u)$ a $u = \varphi(x)$. Princip je popsán v následující větě.

Věta 2.18. *Nechť funkce $f(u)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(u)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Pak má složená funkce $f[\varphi(x)] \varphi'(x)$ na intervalu I primitivní funkci a platí*

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + c. \quad (2.7)$$

Důkaz. Vše bezprostředně plyne z výše připomenutého vzorce pro derivaci složené funkce. Derivace pravé strany rovnosti (2.7) totiž dává integrand z levé strany této rovnosti. $\square$

Integrační metoda založená na předchozí větě se nazývá *první substituční metoda*. Popíšeme si, jak vypadá její praktické použití. Předpoklad o existenci primitivní funkce k funkci $f(u)$ lze zapsat takto:

$$\int f(u) du = F(u) + c.$$

Tvrzení věty potom zapisujeme následovně:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du, \quad (2.8)$$

kde do výrazu na pravé straně za u dosadíme $\varphi(x)$. Výpočet provádíme následovně:

- **Označíme si substituci $\varphi(x) = u$** (označení nové proměnné je nepodstatné, jen to musí být jiné písmeno než stará proměnná, tj. v našem případě x).
- **Rovnost $\varphi(x) = u$ diferencujeme.** (Připomeňme, že diferenciál nějaké funkce $h(z)$ je roven součinu derivace této funkce a přírůstku dz , kde z je nezávisle proměnná této funkce, tj. $dh(z) = h'(z) dz$.) V našem případě je na levé straně nezávisle proměnná označena x a na pravé straně u , tudíž $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ a $u' = \frac{du}{dx} = 1$. Dostaneme tedy rovnost $\varphi'(x) dx = 1 \cdot du$, tj. $\varphi'(x) dx = du$.
- V levém integrálu rovnosti (2.8) tedy nahradíme za funkci $\varphi(x)$ proměnnou u a za výraz $\varphi'(x) dx$ diferenciál du . Prakticky výpočet zapisujeme podobně jako u metody per partes do jakési tabulky. Vzorec (2.8) pak vypadá takto:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) dx = du \end{array} \right| = \int f(u) du, \quad (2.9)$$

kde do výsledné pravé strany musíme dosadit původní proměnnou, tj. $u = \varphi(x)$. Opět je rozumné tento zápis dodržovat a zmechanizovat si popsany postup.

Příklad 2.19. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. V zadání je zřetelně vidět složenou funkci $1/\sqrt{1 + \sin^2 x}$. Její vnější složka je $f(u) = 1/\sqrt{1 + u^2}$ a vnitřní složka je $\varphi(x) = \sin x$. Dále $\varphi'(x) = \cos x$. Tedy

$$f[\varphi(x)] \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2(x)}} \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}},$$

což je zadaný integrand. Je proto možné použít substituční metodu. Substituci zvolíme $\sin x = u$ a diferencováním této rovnosti dostaneme vztah $\cos x dx = du$. Výpočet zapíšeme následovně:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \\ &= \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + c = \ln|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}| + c. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili vzorec 11 z tabulky 2.1.



bychom potřebovali, jak jsme si právě vysvětlili, $2x\sqrt{x^2-3}$. To ovšem není problém, protože konstantu snadno doplníme díky vlastnosti (2.4) z věty 2.4. Je totiž

$$\int x\sqrt{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{x^2-3} dx,$$

což jsme chtěli. Prakticky budeme postupovat tak, že v pomocné tabulce, v níž si značíme substituci a počítáme diferenciály, přidáme další řádek, který dostaneme tak, že řádek udávající rovnost mezi diferenciály vhodně upravíme jako rovnici, abychom nalevo dostali přesně výraz, který máme k dispozici. Např. v případě funkce $x\sqrt{x^2-3}$ by tabulka vypadala takto:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 3 = u \\ 2x dx = du \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right|$$

Zdůrazněme ale, že tímto způsobem můžeme doplnit **pouze** multiplikativní konstantu (tj. konstantu, kterou se násobí). Pokud nám chybí skutečně (nekonstantní) funkce, takto postupovat nelze. K tomu se ještě vrátíme níže.

Příklad 2.20. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx$, $x \in (0, +\infty)$.



Řešení. Jde o předposlední výraz z tabulky 2.4. Substituce tedy bude $u = 1 + \ln x$. Dostaneme

$$\int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{array} \right| = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + c = \frac{(1 + \ln x)^5}{5} + c.$$

O správnosti výpočtu se snadno můžeme přesvědčit derivací. ▲

Příklad 2.21. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \sin x \cos^5 x dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. Zde se nabízí složená funkce $\cos^5 x$ s vnitřní složkou $\cos x$. Její derivace je $-\sin x$, což je výraz, který v integrandu až na násobek -1 máme. Tedy

$$\int \sin x \cos^5 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \\ \sin x dx = -du \end{array} \right| = \int u^5 (-1) du = -\frac{u^6}{6} + c = -\frac{\cos^6 x}{6}.$$

Bylo jen třeba uvědomit si, že $\sin x \cos^5 x dx = \cos^5 x \sin x dx$. ▲



Příklad 2.22. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x e^{-x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Jde o modifikaci druhého příkladu z tabulky 2.4. Volíme substituci $u = -x^2$ a „doplníme“ chybějící konstantu -2 . Dostaneme

$$\int x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} -x^2 = u \\ -2x dx = du \\ x dx = -\frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} e^u + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

Při řešení opět stačilo „umět si představit“, že $x e^{-x^2} dx = e^{-x^2} x dx$. ▲



Příklad 2.23. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Zvolíme substituci $s = x^2$ a vyjde nám:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = s \\ 2x dx = ds \\ x dx = \frac{1}{2} ds \end{array} \right| = \int s e^{-s} \cdot \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} \int s e^{-s} ds =$$

(vzniklý integrál budeme řešit metodou per partes — viz tabulka 2.2; jde o typ mnohočlen krát exponenciála e^{as} , kde $a = -1$)

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{ll} u = s & u' = 1 \\ v' = e^{-s} & v = -e^{-s} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(-s e^{-s} - \int (-e^{-s}) ds \right) = \\ &= \frac{1}{2} (-s e^{-s} - e^{-s}) + c = -\frac{1}{2} (s + 1) e^{-s} + c = -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} + c. \end{aligned}$$
▲



Pro zájemce:

Zadání předchozího příkladu je podobné jako v příkladu 2.22, takže bychom mohli opět „vidět“ složenou funkci e^{-x^2} a zkusit substituci $u = -x^2$. Avšak $(-x^2)' = -2x$, takže (když pomineme konstantu -2) nám přebývá v zadání $x^3 e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} x$ ještě výraz x^2 .

Lepší nápad tedy bude „vidět“ v zadání složenou funkci $f(x^2) = x^2 e^{-x^2}$, kde $f(s) = s e^{-s}$, s vnitřní složkou x^2 . Pak zvolíme substituci $s = x^2$ a vše již proběhne hladce, když si představíme, že $x^3 e^{-x^2} dx = x^2 e^{-x^2} x dx$.

Všimněte si, že v zadání by bylo rovněž možné „vidět“ jinou složenou funkci, a to $g(-x^2) = x^2 e^{-x^2}$, kde $g(s) = -s e^s$, s vnitřní složkou $-x^2$ a volit substituci $s = -x^2$. Výpočet by byl obdobný a výsledek samozřejmě stejný. Zkuste si sami tuto variantu.

V následujících dvou příkladech si všimneme velice jednoduchého, ale důležitého případu substituce. Jde o tzv. *lineární substituci* tvaru $u = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Protože $(ax + b)' = a$, bude platit $a dx = du$. Pokud nám konstanta chybí, vždy ji snadno již známým postupem doplníme.

Příklad 2.24. Vypočítejte neurčitý integrál $\int (4 - 7x)^{10} dx$, $x \in \mathbb{R}$.



Řešení. I tento příklad byl uveden v tabulce 2.4. Zvolíme substituci $u = 4 - 7x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int (4 - 7x)^{10} dx &= \left| \begin{array}{l} 4 - 7x = u \\ -7 dx = du \\ dx = -\frac{1}{7} du \end{array} \right| = \int u^{10} \left(-\frac{1}{7}\right) du = -\frac{1}{7} \int u^{10} du = \\ &= -\frac{1}{7} \frac{u^{11}}{11} + c = -\frac{1}{77} (4 - 7x)^{11} + c. \end{aligned}$$

Příklad 2.25. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \sqrt{2x - 5} dx$, $x \in (5/2, +\infty)$.



Řešení. Opět použijeme lineární substituci $u = 2x - 5$. Vyjde

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 5} dx &= \left| \begin{array}{l} 2x - 5 = u \\ 2 dx = du \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(2x - 5)^3} + c. \end{aligned}$$

Poznámka 2.26. U jednodušších příkladů lze při troše cviku lineární substituci provádět téměř z paměti, čímž se výpočet výrazně urychlí. Jestliže má funkce $f(u)$ primitivní funkci $F(u)$, tj.

$$\int f(u) du = F(u) + c,$$

platí, že

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Důkaz se provede buď substitucí $ax + b = u$, $a dx = du$, tj. $dx = \frac{1}{a} du$, anebo přímým derivováním pravé strany, protože $F'(u) = f(u)$. Vzorec samozřejmě platí na intervalech, kde je funkce $f(ax + b)$ definovaná.

Ukažme si použití na několika příkladech (nepíšeme integrační konstanty):

$$\int e^u du = e^u \quad \Rightarrow \quad \int e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} e^{2x-3} \quad (a = 2, b = -3),$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3} \ln |3x+4| \quad (a = 3, b = 4),$$

$$\int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 \quad \Rightarrow \quad \int (x+7)^4 dx = \frac{1}{5} (x+7)^5 \quad (a = 1, b = 7),$$

Nyní posluchači obvykle považují x za konstantu nezávislou na u , kterou lze při integraci vzhledem k proměnné u vytknout, a počítají dále

$$\int e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2x} \int e^u du = \frac{1}{2x} e^u + c = \frac{e^{x^2}}{2x} + c,$$



čímž je katastrofa dokonána. **Předchozí postup je naprosto chybný!**

Autoři takového postupu totiž zcela ignorují, že mezi starou a novou proměnnou je vazba daná rovnicí $u = \varphi(x)$, tj. v našem případě $u = x^2$, z čehož (pro $x > 0$) máme $x = \sqrt{u}$. Integrál vzniklý po substituci má tedy tvar

$$\int \frac{1}{2x} e^u du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} e^u du = \int \frac{e^u}{2\sqrt{u}} du,$$

takže před integrál byla vlastně vytknuta funkce $1/(2\sqrt{u})$! Bohužel této hrubé chyby se posluchači často dopouštějí.

Abyste se něčemu takovému vyhnuli, nepoužívejte postup naznačený v (2.10), pokud je $\varphi(x)$ funkce. Vždy se snažte mít před očima, jaký tvar musí integrand mít, aby bylo možné použít substituční metodu, tj. $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$. Rozhodněte se, co budete považovat za složenou funkci $f[\varphi(x)]$, a hledejte derivaci vnitřní složky $\varphi'(x)$. Když derivaci nemůžete najít, asi nemáte substituci dobře vybránu. Možná příklad na substituci vůbec není vhodný, rozhodně ne na tu, kterou jste si zvolili.

Na závěr si všimneme toho, že vzorec (2.8) se někdy (méně často, ale zato jde o důležité případy) používá zprava doleva. Tedy jako bychom do „jednoduché“ funkce vložili vnitřní složku a dostali integrál ze složené funkce, který je zdánlivě komplikovanější. V konkrétních případech však tento integrál může být pro další výpočet jednodušší. Použití je obdobné, jen příslušná věta má trochu jiné předpoklady a důkaz je technicky složitější. Připomeňme, že φ^{-1} značí inverzní funkci k funkci φ .

V.3.2.1 Věta 2.27. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na otevřeném intervalu J . Nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na otevřeném intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J . Dále předpokládejme, že funkce $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(t)$.*

Pak funkce $f(x)$ má na intervalu J primitivní funkci $F[\varphi^{-1}(x)]$. Platí tudíž

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt, \quad (2.11)$$

jestliže do primitivní funkce na pravé straně dosadíme za t funkci $\varphi^{-1}(x)$.

Integrační metoda založená na předchozí větě se nazývá *druhá substituční metoda*.

Pro zájemce:

Důkaz. Protože $\varphi'(t) \neq 0$ na I , je podle Darbouxovy věty (viz [4, str. 188]) buď $\varphi'(t) > 0$ pro $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro $t \in I$, takže funkce $x = \varphi(t)$ je ryze monotónní na I , a tudíž k ní



existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Ta má derivaci na J , přičemž platí (viz [12])

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]}, \quad x \in J.$$

Dále podle předpokladu platí $F'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ pro $t \in I$, takže podle vzorce pro derivaci složené funkce a předchozího vztahu dostaneme pro $x \in J$ a $x = \varphi(t)$, že

$$(F[\varphi^{-1}(x)])' = F'[\varphi^{-1}(x)] \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi[\varphi^{-1}(x)]) \varphi'[\varphi^{-1}(x)] \cdot \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]} = f(x),$$

což jsme měli dokázat. $\square$

Použití je obdobné. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$, diferencováním dostaneme $dx = \varphi'(t) dt$ a dosadíme do levé strany (2.11) (tentokrát nemusíme dělat žádné úpravy se vztahem $dx = \varphi'(t) dt$). Do výsledku dosadíme za t inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$ (někdy tento vztah rovněž napíšeme pro přehlednost do pomocné tabulky).



Příklad 2.28. Vypočítejte neurčitý integrál $\int e^{\sqrt{x}} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

Řešení. Zvolíme substituci $x = t^2$, čímž odstraníme nepříjemnou odmocninu v exponentu. Protože $x > 0$, je v našem případě $J = (0, +\infty)$. Funkci $\varphi(t) = t^2$ tedy budeme uvažovat na intervalu $I = (0, +\infty)$ (je samozřejmě náhoda, že nám vyšlo $J = I$). Funkce $\varphi(t) = t^2$ je prostá na intervalu I a zobrazí ho na interval J (grafem je část paraboly). Protože $t > 0$, je $\sqrt{x} = \sqrt{t^2} = |t| = t$. Inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t) = t^2$ je tudíž $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Nyní již můžeme vypočítat daný integrál. Dostaneme (na výpočet vzniklého integrálu použijeme metodu per partes)

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int 2t e^{\sqrt{t^2}} dt = \int 2t e^t dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = 2t & u' = 2 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array} \right| = 2t e^t - \int 2e^t dt = 2t e^t - 2e^t + c = \\ &= 2(t - 1) e^t + c = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} + c. \end{aligned}$$

▲

Je možné dokázat, že výsledek předchozího příkladu platí i na intervalu $(0, +\infty)$. Pokud bychom to ale chtěli ověřit z definice primitivní funkce, tj. derivovali bychom výsledek, museli bychom být dost opatrní, protože funkce $\sqrt{x}$ a $e^{\sqrt{x}}$ mají v bodě $x = 0$ pouze derivaci zprava a navíc nevlastní. Není tudíž možné použít v tomto bodě standardní vzorec pro derivování součinu.

Protože tato situace se v souvislosti se substituční metodou, dost často vyskytuje, uvedeme si jednoduchou větu, která ve většině případů tuto komplikaci snadno vyřeší. Formulace je uvedena pro ohraničené uzavřené intervaly, analogické tvrzení však platí i pro polouzavřené (ohraničené i neohraničené) intervaly.

V.3.3.: Věta 2.29. Necht' funkce $f(x)$ a $F(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na otevřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak je $F(x)$ primitivní k $f(x)$ i na uzavřeném intervalu $[\alpha, \beta]$.

Důkaz. Plyne z [4, str. 111, cvičení 9]. K důkazu lze užít i l'Hospitalovo pravidlo. $\square$

ne 78

Příklad 2.30. Vypočítejte neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2} dx$, $x \in (-1, 1)$.



Řešení. Tento integrál jsme již jednou spočítali metodou per partes — viz příklad 2.15. Tentokrát k jeho výpočtu použijeme substituci $x = \sin t$. Protože platí $J = (-1, 1)$, zvolíme $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Pak funkce $\varphi(t) = \sin t$ zobrazí interval I na interval J . Funkce $\varphi(t) = \sin t$ je na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ prostá a její inverzní funkce je $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, tj. $t = \arcsin x$.

Připravíme si ještě integrand po substituci. Vyjde $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, protože kosinus je na intervalu I kladný. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{t}{2} + c = \end{aligned}$$

viz P. 2.15 (sh. 63)!

(použili jsme výsledek příkladu 2.16)

$$= \frac{1}{2} \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{t}{2} + c = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c,$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 2.15. Protože jak integrand $\sqrt{1-x^2}$, tak výsledná primitivní funkce jsou spojité na uzavřeném intervalu $[-1, 1]$, platí podle věty 2.29 výsledek i na uzavřeném intervalu. Zkontrolovat to přímo výpočtem derivace by bylo opět obtížné, protože funkce $\sqrt{1-x^2}$ a $\arcsin x$ mají v bodech $x = \pm 1$ jednostranné nevlastní derivace. $\blacktriangle$

Příklady k procvičení



1. Integrujte dané funkce:

a) $\int \sin^3 \omega \cos \omega d\omega,$

b) $\int 6t \sin 3t^2 dt,$

c) $\int \frac{4 \tan^3 \phi}{\cos^2 \phi} d\phi,$

d) $\int \cos \beta \sqrt{\sin \beta} d\beta,$

e) $\int -4\rho e^{-2\rho^2} d\rho,$

f) $\int 6r^2 e^{-2r^3} dr,$

g) $\int 2e^{2\sin t} \cos t dt,$

h) $\int \frac{3 \ln^2 W}{W} dW,$

i) $\int \frac{3 \sqrt{\ln y}}{y} dy,$

j) $\int \frac{2C}{(1+C^2)^2} dC,$

k) $\int \frac{8s^2 ds}{\sqrt{(8s^3+27)^2}},$

l) $\int \frac{5W^4 dW}{2\sqrt{4+W^5}}.$

Indegrujte typem $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

Příklad: $f(x) = t \Rightarrow f'(x) dx = dt \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |f(x)| + c$

Příklad: $\int \lg x dx = \int \frac{\ln x}{\ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\ln 10} \ln |x| + c = \frac{1}{\ln 10} \ln |x| + c$

